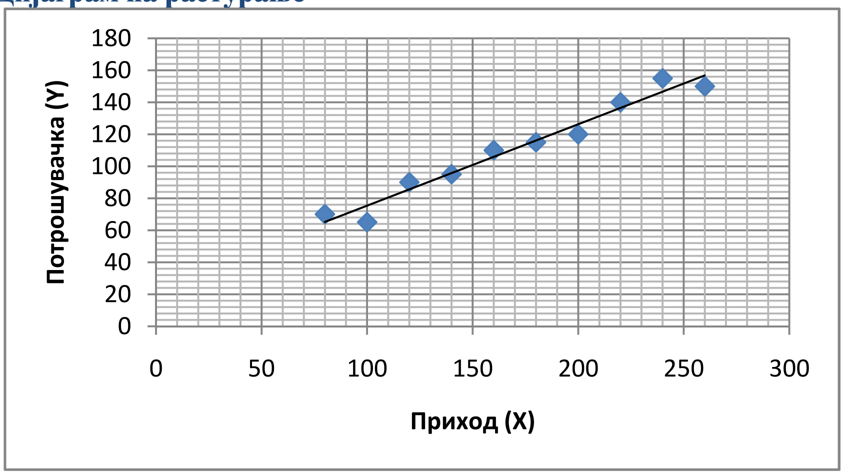
РЕШЕНИЈА НА ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ (Глава 10-14)

ГЛАВА 10

10.1 а. **Дијаграм на растурање**



Прост праволиниски регресионен модел: $y_i = b_0 + b_1 x_i + e_i$

б. **Метод на најмали квадрати**

x	y	xy	x^2	y^2
80	70	5.600	6.400	4.900
100	65	6.500	10.000	4.225
120	90	10.800	14.400	8.100
140	95	13.300	19.600	9.025
160	110	17.600	25.600	12.100
180	115	20.700	32.400	13.225
200	120	24.000	40.000	14.400
220	140	30.800	48.400	19.600
240	155	37.200	57.600	24.025
260	150	39.000	67.600	22.500
1.700	**1.110**	**205.500**	**322.000**	**132.100**

$b_1 = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{10 \cdot 205.500 - 1.700 \cdot 1.110}{10 \cdot 322.000 - 1.700^2} = 0{,}5091$

Зголемувањето на неделниот приход на семејството од 1 евро води до просечно зголемување на неделната потрошувачка на семејството за 0,51 евра.

$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 111 - 0{,}5091 \cdot 170 = 24{,}4545$

Нема економско толкување. Само геометриско: ако приходот е нула, тогаш потрошувачката изнесува 24,45 евра.

$y_i' = 24{,}4545 + 0{,}5091 \cdot x_i$

в. **Колку е добар моделот: мерки на репрезентативност на линијата на регресија**

Стандардна грешка на регресијата

$$S = \sqrt{\frac{\sum (y_i - y_i')^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 - b_0 \sum y_i - b_1 \sum x_i y_i}{n-2}} = \sqrt{\frac{132.100 - 24{,}4545 \cdot 1.110 - 0{,}5091 \cdot 205.500}{10-2}} = 6{,}49$$

Коефициент на детерминација

$r^2 = b_1^2 \cdot \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2} = 0{,}5091^2 \cdot \frac{322.000 - 10 \cdot 170^2}{132.100 - 10 \cdot 111^2} = 0{,}9621$

96,21% од варијациите во неделната потрошувачка можат да се објаснат со приходот. Моделот е добар.

г. **Тестирање на значајноста на регресионата врска**

$H_0: \beta_1 = 0; \quad H_1: \beta_1 \neq 0$

Критична вредност: $t_{\frac{\alpha}{2}; n-2} = t_{\frac{0{,}05}{2}; 10-2} = t_{0{,}025;8} = 2{,}3060$

Реализирана вредност: $t = \frac{b_1}{S_{b_1}} = \frac{0{,}5091}{0{,}0357} = 14{,}25$;

$S_{b_1} = \frac{S}{\sqrt{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}} = \frac{6{,}49}{\sqrt{322.000 - 10 \cdot 170^2}} = 0{,}0357$

Бидејќи $|t| = 14{,}25 > 2{,}3060 = t_{\frac{\alpha}{2}; n-2}$ => H_0 се отфрла. $\beta_1 \neq 0$. Помеѓу приходот и потрошувачката постои праволиниска врска во популацијата.

д. **Интервал на доверба за β_1**

$b_1 - t_{\frac{\alpha}{2}; n-2} \cdot S_{b_1} \leq \beta_1 \leq b_1 + t_{\frac{\alpha}{2}; n-2} \cdot S_{b_1}$

$0{,}5091 - 2{,}3060 \cdot 0{,}0357 \leq \beta_1 \leq 0{,}5091 + 2{,}3060 \cdot 0{,}0357$

$0{,}4267 \leq \beta_1 \leq 0{,}5915$

ѓ. **Интервал за предвидување на просечната вредност на зависната променлива**

$y_p' - t_{\frac{\alpha}{2}; n-2} \cdot S_{y_p'} \leq E(y_p) \leq y_p' + t_{\frac{\alpha}{2}; n-2} \cdot S_{y_p'}$

$167 - 2{,}3060 \cdot 4{,}43 \leq E(y_p) \leq 167 + 2{,}3060 \cdot 4{,}43$

$156{,}78 \leq E(y_p) \leq 177{,}23$

$y_p' = b_0 + b_1 x_p = 24{,}4545 + 0{,}5091 \cdot 280 = 167$

$S_{y_p'} = S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}} = 6{,}49\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(280-170)^2}{322.000 - 10 \cdot 170^2}} = 4{,}43$

е. **Интервал за предвидување на индивидуалните вредности на зависната променлива**

$y_p' - t_{\frac{\alpha}{2}; n-2} \cdot S_{y_p} \leq Y_p \leq y_p' + t_{\frac{\alpha}{2}; n-2} \cdot S_{y_p}$

$167 - 2{,}3060 \cdot 7{,}86 \leq Y_p \leq 167 + 2{,}3060 \cdot 7{,}86$

$148{,}88 \leq Y_p \leq 185{,}12$

$S_{y_p} = S\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}} = 6{,}49\sqrt{1 + \frac{1}{10} + \frac{(280-170)^2}{322.000 - 10 \cdot 170^2}} = 7{,}86$

10.2 б. $y_i' = 12{,}715 + 5{,}247 \cdot x_i$

в. $S = 4{,}28; \; r^2 = 98{,}47\%$

г. Бидејќи $|t| = 15{,}62 > 2{,}7765 = t_{\frac{\alpha}{2}; n-2}$ => H_0 се отфрла.

д. $4{,}3141 \leq \beta_1 \leq 6{,}1799$

ѓ. $138{,}62 \leq E(y_p) \leq 159{,}65$

е. $133{,}274 \leq Y_p \leq 164{,}999$

10.3 б. $y_i' = -1{,}55 + 1{,}58 \cdot x_i$

в. Бидејќи $|t| = \frac{1{,}58}{0{,}11} = 14{,}36 > 3{,}18 = t_{\frac{\alpha}{2}; n-2}$ => H_0 се отфрла

г. $8{,}72 \leq E(y_p) \leq 10{,}31$

10.4 а. **Пирсонов коефициент на проста праволиниска корелација**

$r = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}} = \frac{6 \cdot 22.645 - 441 \cdot 290}{\sqrt{6 \cdot 33.385 - 441^2}\sqrt{6 \cdot 16.016 - 290^2}} = 0{,}954$

Помеѓу вкупниот приход и бројот на продадени производи постои многу висока директна корелациона врска.

x	y	xy	x^2	y^2
65	39	2.535	4.225	1.521
78	43	3.354	6.084	1.849
52	21	1.092	2.704	441
82	64	5.248	6.724	4.096
92	78	7.176	8.464	6.084
72	45	3.240	5.184	2.025
441	**290**	**22.645**	**33.385**	**16.016**

б. **Тестирање на значајноста на оцената на коефициентот на проста праволиниска корелација**

$H_0: \rho = 0; \quad H_1: \rho \neq 0$

Критична вредност: $t_{\frac{\alpha}{2};n-2} = t_{\frac{0,01}{2};6-2} = t_{0,005;4} = 4,6041$

Реализирана вредност: $t = \frac{r}{S_r} = \frac{0,954}{0,1499} = 6,367$;

$S_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0,954^2}{6-2}} = 0,1499$

Бидејќи $|t| = 6,367 > 4,6041 = t_{\frac{\alpha}{2};n-2}$ => H_0 се отфрла. $\rho \neq 0$. Помеѓу вкупниот приход и бројот на продадени производи постои праволиниска врска во популацијата.

10.5 а. $r = 0,9558$
б. $S_r = 0,0093$
Бидејќи $|t| = 10,28 > 2,306 = t_{0,025;8}$ => H_0 се отфрла. $\rho \neq 0$.
в. $r^2 = 91,36\%$

10.6 а. $y_i' = 18,8476 + 1,1842 \cdot x_i$
б. Бидејќи $|t| = \frac{1,1842}{0,359} = 3,2986 > 2,306 = t_{0,025;8}$ => H_0 се отфрла.
в. $r = 0,759$
г. Бидејќи $|t| = \frac{0,759}{0,230} = 3,30 > 2,306 = t_{0,025;8}$ => H_0 се отфрла.

10.7 а. $y_i' = 60 + 5 \cdot x_i$
б. $r^2 = 0,9027$
в. $r = 0,9501$

10.8 б. $y_i' = -10,16 + 0,18 \cdot x_i$

ГЛАВА 11

11.1 а. Праволиниски регресионен модел со две независни променливи
За популацијата: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon_i$
За примерокот: $y_i' = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + e_i$
Центрирање на променливите: $d_1 = x_1 - \bar{x}_1$; $d_2 = x_2 - \bar{x}_2$; $\quad d_1 = y - \bar{y}$

x_1	x_2	y	d_1	d_2	d_y	d_1d_y	d_2d_y	d_1d_2	d_1^2	d_2^2	d_y^2
6	5	80	-2	-2,8	30	-60	-84	5,6	4	7,84	900
7	6	60	-1	-1,8	10	-10	-18	1,8	1	3,24	100
8	10	70	0	2,2	20	0	44	0	0	4,84	400
9	10	40	1	2,2	-10	-10	-22	2,2	1	4,84	100
10	8	0	2	0,2	-50	-100	-10	0,4	4	0,04	2.500
40	**39**	**250**	**0**	**0**	**0**	**-180**	**-90**	**10**	**10**	**20,8**	**4.000**
$\bar{x}_1 = 8$	$\bar{x}_2 = 7{,}8$	$\bar{y} = 50$									

Оценети вредности на параметрите:

$b_1 = \frac{\sum d_2^2 \sum d_1 d_y - \sum d_1 d_2 \sum d_2 d_y}{\sum d_1^2 \sum d_2^2 - (\sum d_1 d_2)^2} = \frac{20{,}8 \cdot (-180) - 10 \cdot (-90)}{10 \cdot 20{,}8 - 10^2} = -26{,}33$

Зголемувањето на цената за 1 евро води до намалување на продадената количина за 26,33 парчиња, под услов цената на конкурентот да остане непроменета.

$b_2 = \frac{\sum d_1^2 \sum d_2 d_y - \sum d_1 d_2 \sum d_1 d_y}{\sum d_1^2 \sum d_2^2 - (\sum d_1 d_2)^2} = \frac{10 \cdot (-90) - 10 \cdot (-180)}{10 \cdot 20{,}8 - 10^2} = 8{,}33$

Зголемувањето на цената на конкурентот за 1 евро води до зголемување на продадената количина за 8,33 парчиња, под услов сопствената цена да остане непроменета.

$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2 = 50 — (-26{,}33) \cdot 8 - 8{,}33 \cdot 7{,}8 = 195{,}67$

$y_i' = 195{,}67 - 26{,}33x_1 + 8{,}33x_2$

б. **Мерки на репрезентативност на линијата на регресија**

Стандардна грешка на регресијата со две независни променливи

$$S = \sqrt{\frac{\sum (y_i - y_i')^2}{n-3}} = \sqrt{\frac{\sum d_y^2 - b_1 \sum d_1 d_y - b_2 \sum d_2 d_y}{n-3}} = \sqrt{\frac{4.000 - (-26{,}33) \cdot (-180) - 8{,}33 \cdot (-90)}{5-3}} = 2{,}236$$

Коефициент на повеќекратна детерминација

$R^2 = \frac{b_1 \sum d_1 d_y + b_2 \sum d_2 d_y}{\sum d_y^2} = \frac{(-26{,}33) \cdot (-180) + 8{,}33 \cdot (-90)}{4.000} = 0{,}9975$

99,75% од варијациите во продадената количина може да се објасни со сопствената цена и цената на конкурентот. Моделот е добар.

в. **Тестирање на значајноста на оценетите параметри**

* За првата независна променлива (цената)

$H_0: \beta_1 = 0; \quad H_1: \beta_1 \neq 0$

Критична вредност: $t_{\frac{\alpha}{2};n-3} = t_{\frac{0{,}05}{2};5-2} = t_{0{,}025;3} = 3{,}1824$

Реализирана вредност: $t = \frac{b_1}{S_{b_1}} = \frac{-26{,}33}{0{,}981} = -26{,}84$;

$$S_{b_1} = S\sqrt{\frac{\sum d_2^2}{\sum d_1^2 \sum d_2^2 - (\sum d_1 d_2)^2}} = 2{,}236 \cdot \sqrt{\frac{20{,}8}{10 \cdot 20{,}8 - 10^2}} = 0{,}981$$

Бидејќи $|t| = 26{,}84 > 3{,}1824 = t_{\frac{\alpha}{2};n-3}$ => H_0 се отфрла. $\beta_1 \neq 0$. Помеѓу цената и продадената количина постои праволиниска врска во популацијата.

* За втората независна променлива (цената на конкурентот)

$H_0: \beta_2 = 0; \quad H_1: \beta_2 \neq 0$

Критична вредност: $t_{\frac{\alpha}{2};n-3} = t_{\frac{0{,}05}{2};5-2} = t_{0{,}025;3} = 3{,}1824$

Реализирана вредност: $t = \frac{b_2}{S_{b_2}} = \frac{8{,}33}{0{,}68} = 12{,}24$;

$$S_{b_1} = S\sqrt{\frac{\sum d_1^2}{\sum d_1^2 \sum d_2^2 - (\sum d_1 d_2)^2}} = 2{,}236 \cdot \sqrt{\frac{10}{10 \cdot 20{,}8 - 10^2}} = 0{,}68$$

Бидејќи $|t| = 12{,}24 > 3{,}1824 = t_{\frac{\alpha}{2};n-3}$ => H_0 се отфрла. $\beta_1 \neq 0$. Помеѓу цената на конкурентот и продадената количина постои праволиниска врска во популацијата.

г. **Оценување и предвидување на вредноста на зависната променлива**

$y_p' = b_0 + b_1 x_{1p} + b_2 x_{2p} = 195{,}67 - 26{,}33 \cdot 5 + 8{,}33 \cdot 6 = 114$

$y_p' - t_{\frac{\alpha}{2};n-3} \cdot S \leq E(y_p) \leq y_p' + t_{\frac{\alpha}{2};n-3} \cdot S$

$114 - 3{,}1824 \cdot 2{,}236 \leq E(y_p) \leq 114 + 3{,}1824 \cdot 2{,}236$

$106{,}88 \leq E(y_p) \leq 121{,}12$

д. **Коефициент на повеќекратна праволиниска корелација**

$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0{,}9975} = 0{,}9988$

ѓ. **Коефициенти на проста праволиниска корелација**

x_1	x_2	y	x_1y	x_2y	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y^2
6	5	80	480	400	30	36	25	6.400
7	6	60	420	360	42	49	36	3.600
8	10	70	560	700	80	64	100	4.900
9	10	40	360	400	90	81	100	1.600
10	8	0	0	0	80	100	64	0
40	**39**	**250**	**1.820**	**1.860**	**322**	**330**	**325**	**16.500**

$r = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$

$r_{yx_1} = \frac{5\cdot 1.820 - 40\cdot 250}{\sqrt{5\cdot 330 - 40^2}\sqrt{5\cdot 16.500 - 250^2}} = -0{,}9$

$r_{yx_2} = \frac{5\cdot 1.860 - 39\cdot 250}{\sqrt{5\cdot 325 - 39^2}\sqrt{5\cdot 16.500 - 250^2}} = -0{,}31$

$r_{x_1x_2} = \frac{5\cdot 322 - 40\cdot 39}{\sqrt{5\cdot 330 - 40^2}\sqrt{5\cdot 16.325 - 39^2}} = 0{,}69$

е. **Коефициенти на парцијална корелација**

$r_{yx_1\cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2}\cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{1-r_{yx_2}^2}\sqrt{1-r_{x_1x_2}^2}} = -0{,}997$

Помеѓу цената и продадената количина постои многу висока инверзна корелациона врска, ако се исклучи влијанието на цената на конкурентот.

$r_{yx_2\cdot x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1}\cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{1-r_{yx_1}^2}\sqrt{1-r_{x_1x_2}^2}} = 0{,}9857$

Помеѓу цената на конкурентот и продадената количина постои многу висока директна корелациона врска, ако се исклучи влијанието на сопствената цена.

11.2 а. $y_i' = 9{,}514 + 2{,}149x_1 - 0{,}649x_2$
б. $r_{yx_1} = 0{,}997$; $r_{yx_2} = 0{,}988$; $r_{x_1x_2} = 0{,}994$
в. $r_{yx_1\cdot x_2} = 0{,}865$; $r_{yx_2\cdot x_1} = 0{,}2366$
г. $R^2 = 0{,}994$; $R = 0{,}997$

ГЛАВА 12

12.1 $W^+ = 62$; $n = 16$
$29 < W^+ < 107$
Нултата хипотеза се прифаќа.

12.2 $W_A =$ збирот на ранговите во помалиот примерок $= 44$
$n_1 = 8; \quad n_2 = 9$
$51 < W_A < 93$
Нултата хипотеза се отфрла, што значи дека квалитетот на сијалиците во поглед на векот на траење не е еднаков кај двата производители.

12.3 $S = 12; n = 14; M = 14; \sigma = 1{,}87$
Бидејќи $Z = \frac{S-M}{\sigma} = \frac{12-7}{1{,}87} = 2{,}67 > z_{0,05} = 2{,}33$, се отфрла нултата хипотеза, а се прифаќа алтернативната хипотеза. Новиот метод влијае на подоброто користење на капацитетот на машините.

12.4 $r_s = -0{,}7636; \quad \alpha = 0{,}05$
$r^* = -0{,}564$
Бидејќи $r_s = -0{,}7636 < -0{,}564 = r^*$, се отфрла нултата хипотеза, што значи дека постои инверзна корелација.

ГЛАВА 13

13.1 **Индивидуални индекси**

Година	БДП по	Базични	Верижни	Базични	Базични
2000	1.771	100,00	-	87,15	87,15
2001	1.821	102,82	102,82	89,61	89,61
2002	1.917	108,24	105,27	94,34	94,34
2003	2.032	114,74	106,00	100,00	100,00
2004	2.114	119,37	104,04	104,03	104,03
2005	2.226	125,69	105,30	109,54	109,54
2006	2.398	135,40	107,73	118,01	118,01

а. **Базични индекси**

$I_{2000,b} = \frac{1.771}{1.771} \cdot 100 = 100{,}00$

$I_{2001,b} = \frac{1.821}{1.771} \cdot 100 = 102{,}82$

$I_{2002,b} = \frac{1.917}{1.771} \cdot 100 = 108{,}24$

Базичниот индекс за 2004 година изнесува 119,37. Тој покажува дека БДП по жител во 2004 во однос на базичната 2000 е зголемен за 19,37%.

б. **Верижни индекси**

$I_{2001,v} = \frac{1.821}{1.771} \cdot 100 = 102{,}82$

$I_{2002,v} = \frac{1.917}{1.821} \cdot 100 = 105{,}27$

$I_{2003,v} = \frac{2.032}{1.917} \cdot 100 = 106{,}00$

Верижниот индекс за 2004 година изнесува 104,04. Тој покажува дека БДП по жител во 2004 во однос на претходната 2003 е зголемен за 4,04%.

в. **Претворање базични во базични индекси - менување на базична година**

Базичните индекси (со база пред трансформацијата) се делат со базичниот индекс (со база пред трансформацијата) од годината која ќе биде нова база.

$I_{2000,b} = \frac{100}{114,74} \cdot 100 = 87,15$

$I_{2001,b} = \frac{102,82}{114,74} \cdot 100 = 89,61$

$I_{2002,b} = \frac{108,24}{114,74} \cdot 100 = 94,34$

г. **Претворање верижни во базични индекси**

*Бидејќи (2003=100), следи $I_{2003,b} = 100$

*За годините кои се после избраната база: $I_{i,b} = \frac{I_{i,v} \cdot I_{i-1,b}}{100}$

$I_{2004,b} = \frac{104,04 \cdot 100}{100} = 104,04$

$I_{2005,b} = \frac{105,30 \cdot 104,04}{100} = 109,55$

$I_{2006,b} = \frac{107,73 \cdot 109,55}{100} = 118,01$

*За годините кои се пред избраната база: $I_{i-1,b} = \frac{I_{i,b}}{I_{i,v}} \cdot 100$

$I_{2002,b} = \frac{100}{106,00} \cdot 100 = 94,34$

$I_{2001,b} = \frac{94,34}{105,27} \cdot 100 = 89,61$

$I_{2000,b} = \frac{89,61}{102,82} \cdot 100 = 87,15$

13.2

Година	СДИ во	Базични	Верижни	Базични	Базични
2003	100,4	100,00		130,05	29,12
2004	260,7	259,66	259,66	337,69	75,61
2005	77,2	76,89	29,61	100,00	22,39
2006	344,8	343,43	446,63	446,63	100,00
2007	506,0	503,98	146,75	655,44	146,75
2008	399,9	398,31	79,03	518,01	115,98

13.4 Групни индекси

	q_0	q_1	p_0	p_1	$\frac{q_1}{q_0}$	$\frac{p_1}{p_0}$	q_1p_0	q_0p_0	q_1p_1	q_0p_1
А	10	14	500	600	1,4	1,2	7000	5000	8400	6000
Б	8	8	1000	1100	1	1,1	8000	8000	8800	8800
В	5	6	900	920	1,2	1,02	5400	4500	5520	4600
							20400	17500	22720	19400

$\frac{q_1}{q_0}q_0p_0$	$\frac{q_0}{q_1}$	$\frac{q_0}{q_1}q_1p_1$	$\frac{p_1}{p_0}q_0p_0$	$\frac{p_0}{p_1}$	$\frac{p_0}{p_1}q_1p_1$	q_0+q_1	$p_1(q_0+q_1)$	$p_0(q_0+q_1)$
7000	0,71	6000	6000	0,833333	7000	24	14400	12000
8000	1	8800	8800	0,909091	8000	16	17600	16000
5400	0,83	4600	4600	0,978261	5400	11	10120	9900
20400		19400	19400		20400		42120	37900

а. Најголем пораст на производството во 2009 во однос на 2008 година бележи производот А (40%).

Најголем пораст на цената во 2009 во однос на 2008 година бележи производот А (20%).

б. **Метод на агрегати**

$I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \cdot 100 = \frac{20.400}{17.500} \cdot 100 = 116{,}57$

$I_q = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} \cdot 100 = \frac{22.720}{19.400} \cdot 100 = 117{,}11$

Физичкиот обем на производството на трите производи во 2009 во однос на 2008 година е зголемен за 16,57% (ако како пондери се користат цените од базичниот период).

$I_p = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot 100 = \frac{19.400}{17.500} \cdot 100 = 110{,}86$

$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \cdot 100 = \frac{22.720}{20.400} \cdot 100 = 111{,}37$

Цените на трите производи во 2009 во однос на 2008 година се зголемени за 10,86% (ако како пондери се користат количините од базичниот период).

в. **Метод на просечни односи**

$I_q = \frac{\sum \frac{q_1}{q_0} q_0 p_0}{\sum q_0 p_0} \cdot 100 = \frac{20.400}{17.500} \cdot 100 = 116{,}57$

$I_q = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum \frac{q_0}{q_1} q_1 p_1} \cdot 100 = \frac{22.720}{19.400} \cdot 100 = 117{,}11$

$I_p = \frac{\sum \frac{p_1}{p_0} q_0 p_0}{\sum q_0 p_0} \cdot 100 = \frac{19.400}{17.500} \cdot 100 = 110{,}86$

$I_p = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum \frac{p_0}{p_1} q_1 p_1} \cdot 100 = \frac{22.720}{20.400} \cdot 100 = 111{,}37$

г. **Фишеров индекс на квантум**

$I_q = \sqrt{\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \cdot \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}} = \sqrt{13.652{,}08} = 116{,}84$

Маршал-Еџвортовиот индекс на цени

$I_p = \frac{\sum [p_1(q_0+q_1)]}{\sum [p_0(q_0+q_1)]} \cdot 100 = \frac{42.120}{37.900} \cdot 100 = 111{,}13$

д. Групен индекс на вредност

$I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} \cdot 100 = \frac{22.720}{17.500} \cdot 100 = 129{,}83$

Вредноста на трите производи во 2009 во однос на 2008 година е зголемена за 29,83%.

13.5 а. Столици (40%); Маси (9,37%)

б. $I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \cdot 100 = 117{,}22$

$I_q = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} \cdot 100 = 117{,}47$

$I_p = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot 100 = 106{,}89$

$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \cdot 100 = 107{,}12$

д. $I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} \cdot 100 = 125{,}56$

13.6 а.

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} \cdot 100 = \frac{230}{210} \cdot 100 = 109{,}52$$

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum \frac{q_0}{q_1} q_1 p_1} \cdot 100 = \frac{230}{210} \cdot 100 = 109{,}52$$

б.

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot 100 = \frac{210}{180} \cdot 100 = 116{,}67$$

$$I_p = \frac{\sum \frac{p_1}{p_0} p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot 100 = \frac{210}{180} \cdot 100 = 116{,}67$$

13.7 а. $I_q = 105{,}56$; $I_p = 111{,}11$

б. $I_{pq} = 117{,}78$

в. $I_p = 111{,}34$

13.8

	q_0	q_1	$q_0 p_0$	$\frac{p_1}{p_0} \cdot 100$	$p_0 = \frac{q_0 p_0}{q_0}$	$\frac{p_1}{p_0}$	$p_1 = \frac{p_1}{p_0} \cdot p_0$
А	1200	1500	10	150	0,0083	1,5	0,0125
Б	2000	3000	30	160	0,015	1,6	0,024
В	4000	6000	120	160	0,03	1,6	0,048

а. $I_q = 148{,}44$

б. $I_p = 159{,}38$

в. $I_{pq} = 236{,}58$

13.9

	q_0	q_1	p_0	$\frac{p_1 q_1}{p_0 q_0}$	$q_1 p_0$	$q_0 p_0$	$q_1 p_1 = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_0} \cdot q_0 p_0$	$p_1 = \frac{q_1 p_1}{q_1}$	$q_0 p_1$
А	0,98	1,05	2,5	1,56	2,625	2,450	3,822	3,640	3,567
Б	2,1	1,93	3,2	1,80	6,176	6,720	12,096	6,267	13,161
В	0,5	0,52	4	1,07	2,080	2,000	2,140	4,115	2,058
					10,881	**11,170**	**18,058**		**18,786**

а. $I_q = 97{,}41$

б. $I_p = 168{,}21$

в. $I_{pq} = 161{,}67$

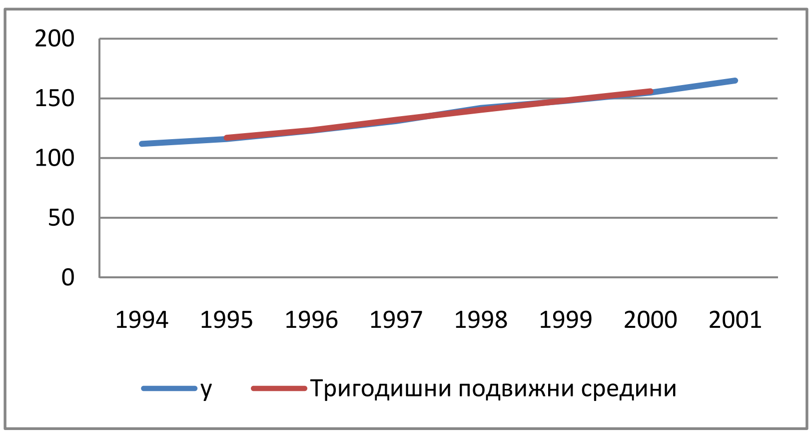
ГЛАВА 14

14.1 Праволиниски тренд

а. **Метод на подвижни средни големини**

Со овој метод се врши притапување на варијациите во серијата, односно се изолира трендот. Првата тригодишна подвижна средна големина се добива како $\frac{112+116+123}{3} = 117$; втората $\frac{116+123+131}{3} = 123{,}33$; итн.

Година	y	**Тригодишни подвижни средини**	x	xy	x^2	y_t	$y - y_t$	$(y - y_t)^2$	$\frac{y}{y_t} \cdot 100$
1994	112		-7	-784	49	109,34	2,66	7,08	102,43
1995	116	117,00	-5	-580	25	117,1	-1,1	1,21	99,06
1996	123	123,33	-3	-369	9	124,86	-1,86	3,46	98,51
1997	131	132,00	-1	-131	1	132,62	-1,62	2,62	98,78
1998	142	140,33	1	142	1	140,38	1,62	2,62	101,15
1999	148	148,33	3	444	9	148,14	-0,14	0,02	99,91
2000	155	156,00	5	775	25	155,9	-0,9	0,81	99,42
2001	165		7	1.155	49	163,66	1,34	1,80	100,82
	1.092			**652**	**168**			**19,62**	



б. **Скратен метод на најмали квадрати**

Од сликата може да се види дека трендот е праволиниски: $y_t = a + bx_i$

Поради тоа што податоците се прикажани во сукцесивни временски интервали (години) се разликуваат за ист износ, односно за 1, се применува скратениот метод на најмали квадрати. Овој метод се базира на трансформација на серијата на временските интервали (годините) на следниот начин: бидејќи серијата има парен број на податоци, средишните членови се означуваат со -1 и 1, а периодите што им претходат со -3, -5 и -7, додека периодите кои се после средишните членови се означуваат со 3, 5 и 7 (Може средишните членови да се означат и со -0,5 и 0,5, периодите кои им претходат со -1,5, -2,5 и -3,5 и периодите кои што следат со 1,5, 2,5 и 3,5).

$a = \frac{\sum y}{n} = \bar{y} = \frac{1.092}{8} = 136{,}5$

$b = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{652}{168} = 3{,}88$

$y_t = 136{,}5 + 3{,}88 \cdot x_i$

Просечното производство на челик во периодот 1994-2001 година изнесува 136,5 тони. Производството на челик просечно годишно се зголемува за 3,88 тони.

в. **Интерполација (вметнување) - утврдување на вредностите на трендот**
$y_{2000} = 136{,}5 + 3{,}88 \cdot 5 = 155{,}9$
г. **Екстраполација (предвидување на идното движење)**

$y_t - t_{\frac{\alpha}{2};n-2} \cdot S_{y_t} \le y_i^* \le y_t + t_{\frac{\alpha}{2};n-2} \cdot S_{y_t}$

$y_{2003} = 136{,}5 + 3{,}88 \cdot 11 = 179{,}18$

$t_{\frac{\alpha}{2};n-2} = t_{\frac{0,05}{2};8-2} = t_{0,025;6} = 2{,}4469$

$S_{y_t} = \sqrt{\frac{\sum(y_i - y_t)^t}{n-2}} = \sqrt{\frac{19{,}62}{8-2}} = 1{,}81$

$179{,}18 - 2{,}4469 \cdot 1{,}81 \le y_{2003}^* \le 179{,}18 + 2{,}4469 \cdot 1{,}81$

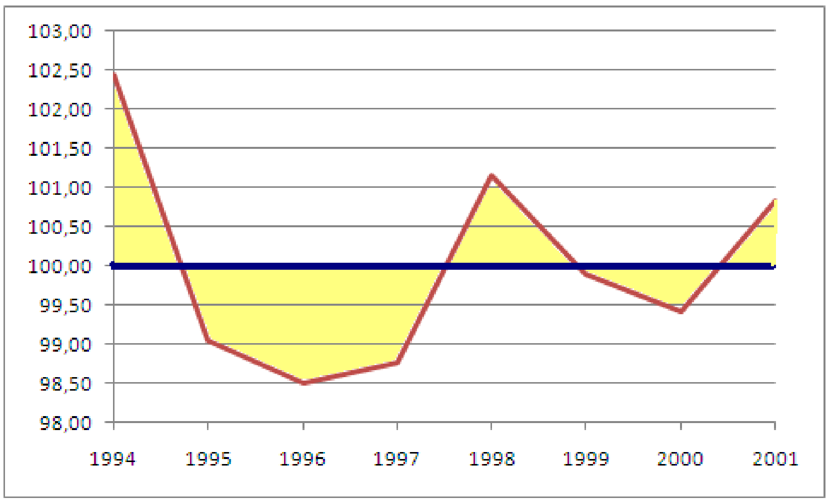
$174{,}78 \le y_{2003}^* \le 183{,}58$

д. **Исклучување (отстранување) на тренд компонентата**

Поаѓајќи од мултипликативната теорија, трендот се отстранува од серијата, со делење на емпириските (оригиналните) податоци (y_i) со вредностите на трендот (y_t):

$\frac{Y}{T} = C \cdot S \cdot R$

На овој начин добиената серија нема тренд го покажува само влијанието на цикличната, сезонската и резидуалната компонента.



14.2

Година	y	x	xy	x^2	y_t	Тригодишни подвижни средини	$\frac{y}{y_t} \cdot 100$
2002	86	-3	-258	9	84,97		101,21
2003	87	-2	-174	4	87,36	87,33	99,59
2004	89	-1	-89	1	89,75	89,33	99,16
2005	92	0	0	0	92,14	91,67	99,85
2006	94	1	94	1	94,53	94,33	99,44
2007	97	2	194	4	96,92	97,00	100,08
2008	100	3	300	9	99,31		100,69
	645		**67**	**28**			

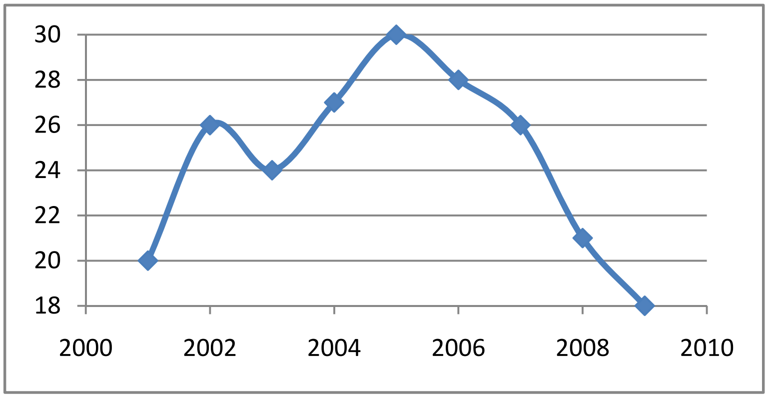
а. $y_t = 92{,}14 + 2{,}39 \cdot x_i$

б. Соодветните вредности значајно не отстапуваат.

г. $103{,}66 \leq y^*_{2011} \leq 107{,}30$

14.3 а. **Параболичен тренд**

Дијаграмот на растурање покажува дека трендот е параболичен: $y_t = a + bx_i + cx_i^2$



Година	y	x	xy	x^2	x^2y	x^4	y_t	$(y-y_t)^2$
2001	20	-4	-80	16	320	256	20,07	0,005
2002	26	-3	-78	9	234	81	23,90	4,410
2003	24	-2	-48	4	96	16	26,55	6,503
2004	27	-1	-27	1	27	1	28,02	1,040
2005	30	0	0	0	0	0	28,31	2,856
2006	28	1	28	1	28	1	27,42	0,336
2007	26	2	52	4	104	16	25,35	0,423
2008	21	3	63	9	189	81	22,10	1,210
2009	18	4	72	16	288	256	17,67	0,109
	220		**-18**	**60**	**1286**	**708**		**16,892**

$b = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{-18}{60} = -0{,}3$

$c = \frac{n\sum x^2y - \sum y \sum x^2}{n\sum x^4 - (\sum x^2)^2} = \frac{9 \cdot 1.286 - 220 \cdot 60}{9 \cdot 708 - 60^2} = -0{,}59$

$a = \frac{\sum y - c\sum x^2}{n} = \frac{220-(-0{,}59)\cdot 60}{9} = 28{,}31$

$y_t = 28{,}31 - 0{,}3x_i - 0{,}59x_i^2$

б. $y_t - t_{\frac{\alpha}{2};n-2} \cdot S_{y_t} \leq y_i^* \leq y_t + t_{\frac{\alpha}{2};n-2} \cdot S_{y_t}$

$y_{2011} = 28{,}31 - 0{,}3 \cdot 6 - 0{,}59x_i^2 \cdot 6^2 = 5{,}27$

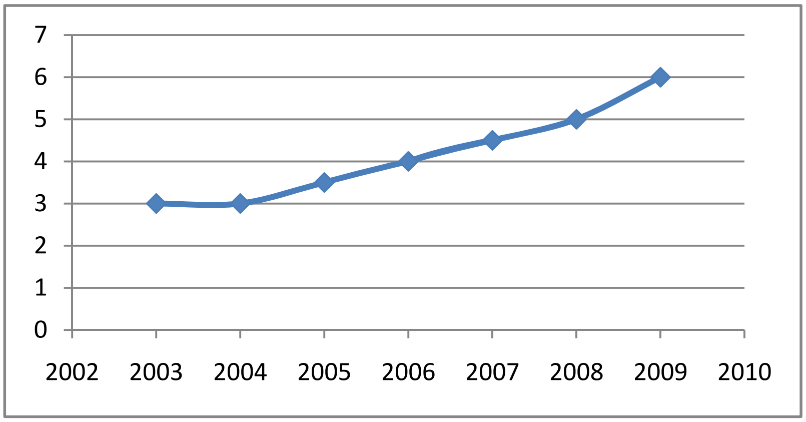
$t_{\frac{\alpha}{2};n-3} = t_{\frac{0{,}05}{2};9-3} = t_{0{,}025;6} = 2{,}4469$

$S_{y_t} = \sqrt{\frac{\sum(y_i - y_t)^t}{n-3}} = \sqrt{\frac{16{,}89}{9-3}} = 1{,}678$

$5{,}27 - 2{,}4469 \cdot 1{,}678 \leq y^*_{2011} \leq 5{,}27 + 2{,}4469 \cdot 1{,}678$

$1{,}16 \leq y^*_{2011} \leq 9{,}38$

14.4 а.



Можеби праволинискиот тренд.

б. Праволиниски тренд:
$y_t = 4{,}14 + 0{,}5 \cdot x_i$
$S_{y_t} = 0{,}23$

Параболичен тренд:
$y_t = 3{,}9 - 0{,}5x_i - 0{,}059x_i^2$
$S_{y_t} = 0{,}09$
Поради тоа што помала стандардна грешка има параболичниот тренд, може да се заклучи дека параболичниот во однос на праволинискиот тренд остварува подобра апроксимација на податоците за невработените.

14.5 а. **Експоненцијален тренд**

Година	y	x	$\log y$	$x \cdot \log y$	x^2
1997	42	-6	1,6232	-9,7395	36
1998	47	-5	1,6721	-8,3605	25
1999	55	-4	1,7404	-6,9615	16
2000	69	-3	1,8388	-5,5165	9
2001	91	-2	1,9590	-3,9181	4
2002	115	-1	2,0607	-2,0607	1
2003	141	0	2,1492	0,0000	0
2004	191	1	2,2810	2,2810	1
2005	236	2	2,3729	4,7458	4
2006	271	3	2,4330	7,2989	9
2007	329	4	2,5172	10,0688	16
2008	407	5	2,6096	13,0480	25
2009	525	6	2,7202	16,3210	36

			27,9774	**17,2067**	**182**

$\log a = \frac{\sum \log y}{n} = \frac{27{,}977}{13} = 2{,}152 \;=> a = 141{,}94$

$\log b = \frac{\sum x\log y}{\sum x^2} = \frac{17{,}207}{182} = 0{,}0945 \;=> b = 1{,}243$

$y_t = a \cdot b^x = 141{,}94 \cdot 1{,}243^x$

б. **Експоненцијална стапка на раст**

$r_e = (b-1) \cdot 100 = (1{,}243 - 1) \cdot 100 = 24{,}3\%$

$r_g = \left(\sqrt[N-1]{\frac{y_N}{y_1}} - 1\right) \cdot 100 = \left(\sqrt[13-1]{\frac{525}{42}} - 1\right) \cdot 100 = 23{,}43\%$

14.6 а. $y_t = 14{,}92 \cdot 1{,}234^x$

б. $y_{2014} = 80{,}22$

в. $r_e = 23{,}40\%; \quad r_g = 24{,}10\%$

14.7 а. **Модифициран експоненцијален тренд**

$y_t = k + a \cdot b^x$

k претставува асимптота (граница на која функцијата и се приближува кога вредноста на x тежи кон $+\infty$ или $-\infty$)

Година	y	x
2000	320	0
2001	310	1
2002	330	2
2003	360	3
2004	355	4
2005	370	5
2006	372	6
2007	380	7
2008	400	8

За определување на параметрите се користи методот на избрани точки. Најпрво, се избираат три вредности (точки) на почетокот (y_1), на средината (y_2) и на крајот на временската серија (y_3), така што растојанието помеѓу точките (r) да биде еднакво.

$y_1 = 320;\ y_2 = 355;\ y_3 = 400;\ r = 3$

$b^r = \frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1}; \quad b^3 = \frac{400-355}{355-320} = 1{,}2857 => b = 1{,}0874$

$a = \frac{y_2 - y_1}{b^r - 1} = \frac{355-320}{1{,}2875-1} = 122{,}5061$

$k = y_1 - a = 320 - 122{,}5061 = 197{,}4939$

$y_t = 197{,}4939 + 122{,}5061 \cdot 1{,}0874^{\,x}$

б. $y_{2009} = 197{,}4939 + 122{,}5061 \cdot 1{,}0874^{\,9} = 457{,}91$

14.8 **Сезонска компонента**

а. **Методот на однос спрема општиот месечен (квартален) просек**

Година	Квартал			
	I	II	III	IV
2004	/	12	25	5
2005	4	15	40	7

2006	6	20	45	4
2007	7	23	52	/
Квартални средни големини	**5,67**	**17,5**	**40,5**	**5,3**
Сезонски индекси	**32,87**	**101,51**	**234,92**	**30,93**

Прво, се пресметува средната големина за секој квартал: $\bar{y}_{\mathrm{I}} = \frac{4+6+7}{3} = 5{,}67;$ $\bar{y}_{\mathrm{II}} = \frac{12+15+20+23}{4} = 17{,}5$, итн.

Второ, од средните квартални големини се пресметува општа средна големина:
$\bar{\bar{y}} = \frac{\sum \bar{y}_i}{n} = \frac{5{,}67+17{,}5+40{,}5+5{,}3}{4} = \frac{68{,}97}{4} = 17{,}24$

Трето, се пресметуваат сезонските индекси како однос на соодветната средна квартална големина и општата средна големина:
$\frac{5{,}67}{17{,}24} \cdot 100 = 32{,}87$

Сезонскиот индекс за првиот квартал покажува дека продажбата била под влијание на сезоната (под општиот просек за 67,13%)

б. **Методот на односи спрема подвижните средни големини**

Прво се пресметуваат подвижните средни големини со четири члена. Тие ја претставуваат тренд компонентата.
$y_{3,4} = \frac{12+25+5+4}{4} = 11{,}5;$ $y_{4,5} = \frac{25+5+4+15}{4} = 12{,}25;$ итн.
$y_4 = \frac{y_{3,4}+y_{4,5}}{2} = 11{,}875\,;$ итн.

Со делење на оригиналните податоци со (центрираните) подвижни средни големини се добиваат специфичните сезонски индекси. Тие го покажуваат влијанието на секоја сезона од годината.

Дополнително, се пресметуваат и типични сезонски индекси. Тие го покажуваат влијанието на сезоната за повеќе години заедно.

Година	Квартал	Продажба y	Подвижни средни големини	Центрирани подвижни средни големини y_t	Специфични сезонски индекси $\frac{y}{y_t}$
2004	I	/			
	II	12			
	III	25	11,5		
	IV	5	12,25	11,875	0,42
2005	I	4	16	14,125	0,28
	II	15	16,5	16,25	0,92
	III	40	17	16,75	2,39
	IV	7	18,25	17,625	0,40
2006	I	6	19,5	18,875	0,32
	II	20	18,75	19,125	1,05
	III	45	19	18,875	2,38
	IV	4	19,75	19,375	0,21
2007	I	7	21,5	20,625	0,34
	II	23			
	III	52			
	IV	/			

Година	Квартал I	II	III	IV
2004	/	/	/	0,42
2005	0,28	0,92	2,39	0,40
2006	0,32	1,05	2,38	0,21
2007	0,34	/		/
Типични сезонски индекси	**0,313**	**0,985**	**2,385**	**0,343**

$\frac{0,28+0,32+0,34}{3} = 0,313; \quad \frac{0,92+1,05}{2} = 0,985;$ итн.

Исклучување на сезонската компонента, според мултипликативната теорија:

Квартал	y_{2006}	Типичен сезонски индекс I_s	$\frac{y_{2006}}{I_s} \cdot 100$
I	6	31,3	19,17
II	20	98,5	20,30
III	45	238,5	18,87
IV	4	34,3	11,66

в. **Методот на односи спрема трендот**

Година	Специфични сезонски индекси Квартал I	II	III	IV
2004	/	/	/	0,42
2005	0,28	0,92	2,39	0,40
2006	0,32	1,05	2,38	0,21
2007	0,34	/		/
Типични сезонски индекси	**0,313**	**0,985**	**2,385**	**0,343**

Типичните сезонски индекси претставуваат просеци кои ги нивелираат влијанијата на специфичните сезонски индекси од една во друга година. За да се согледа колку во просек се зголемува/намалува сезонското влијание по квартали за секој квартал поодделно потребно е да се определи математичкиот израз на линијата на трендот на специфичните сезонски индекси.

За првиот квартал:

y	x	xy	x^2
0,28	-1	-0,28	1
0,32	0	0	0

0,34	1	0,34	1
		0,06	**2**

$a = \frac{\sum y}{n} = \frac{0,94}{3} = 0,313$
$b = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{0,06}{2} = 0,03$
Прв квартал: $y_{t(I)} = 0,313 + 0,03x$

За вториот квартал:

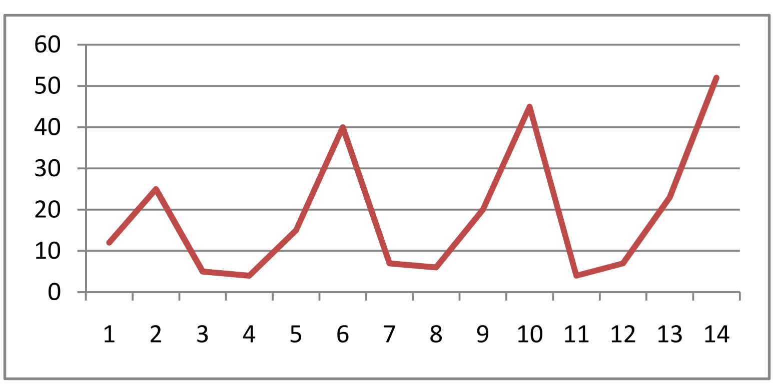
y	x	xy	x^2
0,92	-0,5	-0,46	0,25
1,05	0,5	0,525	0,25
		0,065	**0,5**

$a = \frac{\sum y}{n} = \frac{1,97}{2} = 0,985$
$b = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{0,065}{0,5} = 0,13$
Втор квартал: $y_{t(II)} = 0,985 + 0,13x$
На овој начин се пресметуваат линиите на трендот на специфичните сезонски индекси на останатите два квартали:
Трет квартал: $y_{t(III)} = 2,385 - 0,01x$
Четврт квартал: $y_{t(IV)} = 2,343 - 0,105x$
Коефициентот a е еднаков на типичниот сезонски индекс. Коефициентот b ја претставува просечната промена на кварталното сезонско влијание од една до друга година.
Со замена на вредностите на x во линиите на трендот на специфичните сезонски индекси се добиваат кварталните тренд вредности:

Година	**Квартални тренд вредности**			
	I	**II**	**III**	**IV**
2004	/	/	/	0,448
2005	0,283	0,92	2,39	0,343
2006	0,313	1,05	2,38	0,238
2007	0,343	/		/

г. **Предвидување - тренд плус сезонска компонента**

Потребно е прво да се утврди линијата на трендот.



Трендот е праволиниски. Видливи се изразити сезонски варијации.

$a = \frac{\sum y}{n} = \frac{265}{14} = 18{,}93$
$b = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{605}{910} = 0{,}66$
$y_t = 18{,}93 + 0{,}66x$

		y	x	xy	x^2
2004	II	12	-13	-156	169
	III	25	-11	-275	121
	IV	5	-9	-45	81
2005	I	4	-7	-28	49
	II	15	-5	-75	25
	III	40	-3	-120	9
	IV	7	-1	-7	1
2006	I	6	1	6	1
	II	20	3	60	9
	III	45	5	225	25
	IV	4	7	28	49
2007	I	7	9	63	81
	II	23	11	253	121
	III	52	13	676	169
				605	**910**

$y_{t(\text{III2008})} = 18{,}93 + 0{,}66 \cdot 21 = 32{,}89$
Оваа е вредност на продажбата за третиот квартал на 2008 година без да се земе предвид влијанието на сезоната. За да се вклучи влијанието на сезоната потребно е предвидената вредност на трендот да се помножи со соодветниот типичен сезонски индекс и да се подели со 100:
$y_t^* = \frac{y_t \cdot I_s}{100} = \frac{32{,}89 \cdot 2{,}385}{100} = 78{,}44$

14.9 б.

Квартали	**Специфични сезонски индекси**				**Типични сезонски индекси**
	1999	**2000**	**2001**	**2002**	
I	-	0,57	0,62	0,66	62
II	-	0,95	0,96	0,96	96
III	1,81	1,84	1,74	-	180
IV	0,59	0,63	0,68	-	63

Типичниот индекс во третиот квартал изнесува 180 и покажува пораст на нивото на појавата за 80% како резултат на влијанието на сезонската компонента (сезонските варијации). Во останатите квартали нивото на појавата се намалило за 38% во првиот квартал; 4% во вториот и за 37% во четвртиот квартал како резултат на негативното влијание на сезонските варијации.

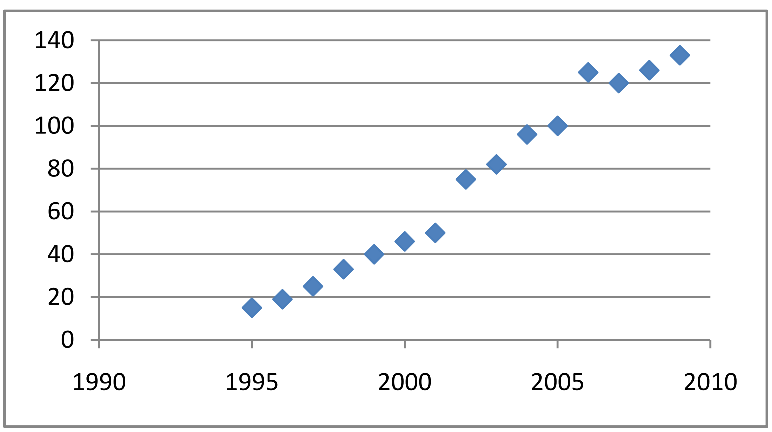
14.10 а. $\bar{\bar{y}} = \frac{\sum \bar{y}_i}{n} = \frac{44{,}99}{12} = 3{,}75$

б.

Месец	**Месечен просек**	**Сезонски индекси**
I	2,00	53
II	2,33	62
III	2,33	62
IV	3,67	98
V	1,67	45
VI	1,33	35
VII	2,33	62
VIII	4,67	125
IX	8,33	222
X	8,33	222
XI	4,33	115
XII	3,67	98
Σ	**44,99**	

14.11 а. **Циклична компонента**

Појавата има праволиниски тренд.



$a = \frac{\sum y}{n} = \frac{1.085}{15} = 72{,}33$

$b = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{2.623}{280} = 9{,}39$

$y_t = 72{,}33 + 9{,}39x$

Година	y	x	xy	x^2	Тренд y_t	Циклус $\frac{y}{y_t}$	Раст или опаѓање
1995	15	-7	-105	49	6,74	222,55	+
1996	19	-6	-114	36	16,11	117,94	+
1997	25	-5	-125	25	25,48	98,12	-
1998	33	-4	-132	16	34,85	94,69	-
1999	40	-3	-120	9	44,22	90,46	-
2000	46	-2	-92	4	53,59	85,84	-
2001	50	-1	-50	1	62,96	79,42	-
2002	75	0	0	0	72,33	103,69	+
2003	82	1	82	1	81,70	100,37	+
2004	96	2	192	4	91,07	105,41	+
2005	100	3	300	9	100,44	99,56	-
2006	125	4	500	16	109,81	113,83	+
2007	120	5	600	25	119,18	100,69	+
2008	126	6	756	36	128,55	98,02	-
2009	133	7	931	49	137,92	96,43	-
Σ	**1.085**		**2.623**	**280**			

Според мултипликативната теорија: $CR = \frac{y}{y_t}$, бидејќи набљудуваните податоци се прикажани на годишно ниво (не може да се утврдат сезонските влијанија).
Последната колона на табелата покажува дека постои една фаза со траење од 1 година (2005), три фази со траење од 2 години (1995-1996; 2006-2007; 2008-2009), една фаза со траење од 3 години (2002-2004) и една фаза со траење од 5 години (1997-2001).

б. Хипотезите се:

H_0: Цикличните варијации се јавуваат случајно.

H_1: Присутни се статистички значајни циклични варијации.

Должина на фазите во години	Емпириски број на фази f_i	Очекуван број на фази f_i^t	$(f_i - f_i^t)^2$	$\frac{(f_i - f_i^t)^2}{f_i^t}$
1	1	5	16	3,2
2	3	2,02	0,96	0,47
3 и повеќе	2	0,65	1,82	2,80
Σ				**6,48**

Очекуваниот број на фази се определува како:

$f_1^t = \frac{5(n-3)}{12} = \frac{5(15-3)}{12} = 5$

$f_2^t = \frac{11(n-4)}{60} = \frac{11(15-4)}{60} = 2,02$

$f_{3\text{ и повеќе}}^t = \frac{4n-21}{60} = \frac{4 \cdot 15-21}{60} = 0,65$

Бидејќи $\chi^2 = 6,48 < 6,898 = \chi^2_{0,05;n>12}$ => H_0 се прифаќа. Цикличните варијации се јавуваат случајно.