РЕШЕНИЈА НА ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ (Глава 6 - 9)

ГЛАВА 6

6.1 **Оценка на аритметичката средина на основната маса**

а. $\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{x}} \leq M \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{x}}$

$\bar{x} = 16{,}1;\ F(z) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975 => z = 1{,}96;\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{0{,}49}}{\sqrt{36}} = 0{,}117$

$16{,}1 - 1{,}96 \cdot 0{,}117 \leq M \leq 16{,}1 + 1{,}96 \cdot 0{,}117$

$15{,}87 \leq M \leq 16{,}33$

б. $F(z) = 1 - \frac{0{,}01}{2} = 0{,}995 => z = 2{,}575$

$16{,}1 - 2{,}575 \cdot 0{,}117 \leq M \leq 16{,}1 + 2{,}575 \cdot 0{,}117$

$15{,}80 \leq M \leq 16{,}40$ => се проширува интервалот (се намалува прецизноста на оцената)

в. $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{0{,}49}}{\sqrt{50}} = 0{,}099$

$16{,}1 - 1{,}96 \cdot 0{,}099 \leq M \leq 16{,}1 + 1{,}96 \cdot 0{,}099$

$15{,}91 \leq M \leq 16{,}29$ => се стеснува интервалот (се зголемува прецизноста на оцената)

г. $15{,}87 \cdot 1000 \leq MN \leq 16{,}33 \cdot 1000$

$15.870 \leq MN \leq 16.330$

6.2 а. $78{,}08 \leq M \leq 85{,}92$

6.3 $49{,}26 \leq M \leq 50{,}74$

6.4

x	**f**	**x**	**xf**	$x^2 f$
до 500	12	400	4.800	1.920.000
500 - 700	25	600	15.000	9.000.000
700 - 900	40	800	32.000	25.600.000
900 - 1.100	15	1.000	15.000	15.000.000
1.100 и повеќе	8	1.200	9.600	11.520.000
	100		**76.400**	**63.040.000**

а. $\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{76.400}{100} = 764;\ \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum x^2 f - n\bar{x}^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{63.040.000 - 100 \cdot 764^2}{100(100-1)}} = 21{,}72$

$F\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975 => z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

$764 - 1{,}96 \cdot 21{,}72 \leq M \leq 764 + 1{,}96 \cdot 21{,}72\ ;\ 721{,}43 \leq M \leq 806{,}57$

б. $7.214.300 \leq MN \leq 8.065.700$

в. $n = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \sigma^2}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 217^2}{\left(\frac{22}{2}\right)^2} = 1495$

6.5 а. $36{,}85 \leq M \leq 39{,}95$

6.6 **Оценка на пропорцијата на основната маса**

Успех: ”Вработениот има симптоми на сериозна болест”. Фреквенцијата на успех во

примерокот е 120. Веројатноста на успех во примерокот е $p = \frac{f}{n} = \frac{120}{400} = 0,3$.
$\sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{400-1}} = 0,0229$; $p - z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_p \leq P_0 \leq p + z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_p$;
$0,3 - 2,575 \cdot 0,0229 \leq P_0 \leq 0,3 - 2,575 \cdot 0,0229$; $0,2410 \leq P_0 \leq 0,3590$

6.7 $0,721 \leq P_0 \leq 0,797$

6.8 $0,224 \leq P_0 \leq 0,476$

6.9 $p = \frac{f}{n} = \frac{60+40+20}{500} = 0,24$; $0,1988 \leq P_0 \leq 0,2812$; $29.820 \leq NP_0 \leq 42.180$

6.10 а. $61,66\% \leq P_0 \leq 70,34\%$
б. $5.932 \leq NP_0 \leq 7.668$

6.11 **Оценка врз основа на стратификуван примерок**

$n_i\bar{x}_i$	$n_i\sigma_i^2$
90	60
250	250
120	110
460	**420**

$\bar{\bar{x}} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{\bar{x}}} \leq M \leq \bar{\bar{x}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{\bar{x}}}$

$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum n_i\bar{x}_i}{n} = \frac{460}{50} = 9,2$; $\sigma_{\bar{\bar{x}}} = \frac{\sqrt{\sum n_i\sigma_i^2}}{50} = \frac{\sqrt{420}}{50} = 0,41$; $F\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{0,01}{2} = 0,995 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575$
$9,2 - 2,575 \cdot 0,41 \leq M \leq 9,2 + 2,575 \cdot 0,41$
$8,14 \leq M \leq 10,26$; $8.140 \leq NM \leq 10.260$

6.12 а. $n = N \cdot (\text{стапка на избор}) = 6.000 \cdot 0,04 = 240$
б. $42,86 \leq M \leq 44,14$; $257.160 \leq NM \leq 264.840$

6.13

Стратум	n_i	p_i	n_ip_i	$\sigma_{p_i}^2$	$\frac{n_i^2}{n^2}$	$\frac{n_i^2}{n^2}\sigma_{p_i}^2$
Висококвалификувани	200	0,04	8	0,000193	0,111111	0,000021
Квалификувани	300	0,05	15	0,000159	0,25	0,000040
Полуквалификувани	100	0,10	10	0,000909	0,027778	0,000025
	600		**33**			**0,000086**

$\bar{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{p}} \leq P_0 \leq \bar{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{p}}$

$\bar{p} = \frac{\sum n_ip_i}{n} = \frac{33}{600} = 0,055$; $\sigma_{p_i}^2 = \frac{p_i(1-p_i)}{n_i-1}$; $\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\sum \frac{n_i^2}{n^2}\sigma_{p_i}^2} = \sqrt{\sum 0,00086} = 0,0093$
$0,055 - 1,96 \cdot 0,0093 \leq P_0 \leq 0,055 - 1,96 \cdot 0,0093$
$0,0368 \leq P_0 \leq 0,0732$

6.14 а. $0,5064 \leq P_0 \leq 0,6656$

6.15 **Оценување врз основа на мал примерок**
$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2};n-1}s_{\bar{x}} \leq M \leq \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2};n-1}s_{\bar{x}}$

$n = 24;\ \bar{x} = 18{,}68; s = 1{,}686;\ s_{\bar{x}} = 0{,}344;\ t_{\frac{\alpha}{2};n-1} = t_{\frac{0,1}{2};24-1} = t_{0,05;23} = 1{,}7139$
$18{,}68 - 1{,}7139 \cdot 0{,}344 \leq M \leq 18{,}68 + 1{,}7139 \cdot 0{,}344$
$18{,}09 \leq M \leq 19{,}27$

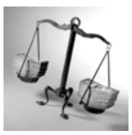
6.16 $19{,}13 \leq M \leq 20{,}47$

6.17 $4{,}12 \leq M \leq 7{,}50$

6.18 $1{,}286 \leq M \leq 3{,}281$

6.19 $1{,}091 \leq M \leq 1{,}387$

6.20 а. $24{,}17 \leq M \leq 38{,}05$
б. $0{,}098 \leq P_0 \leq 0{,}9778$



ГЛАВА 7

7.1 **Тестирање на хипотезата за вредноста на аритметичката средина на популацијата**

а. Бидејќи $H_1: M \neq 28$ => двонасочен тест (областа на отфрлање на нултата хипотеза од двете страни на распоредот).
Критична вредност: $F\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$
Реализирана вредност: $z = \frac{\bar{x}-M}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{25-28}{1{,}58} = 1{,}899;\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{150}}{\sqrt{60}} = 1{,}58$
Бидејќи $|z| = 1{,}899 < 1{,}96 = z_{\frac{\alpha}{2}}$ => H_0 се прифаќа
Втор начин: $p - \text{вредност} = 2[F(-z)] = 2[1 - F(z)] = 2[1 - F(1{,}899)] = 2[1 - 0{,}9713] = 2 \cdot 0{,}0287 = 0{,}0574 > 0{,}05$ => H_0 се прифаќа

б. Бидејќи $H_1: M > 23$ => десностран еднонасочен тест (областа на отфрлање на нултата хипотеза од десната страна на распоредот).
Критична вредност: $F(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \Rightarrow z_{1-\alpha} = 1{,}645$
Реализирана вредност: $z = \frac{\bar{x}-M}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{25-23}{1{,}58} = 1{,}266;\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{150}}{\sqrt{60}} = 1{,}58$
Бидејќи $z = 1{,}266 < 1{,}645 = z_{1-\alpha}$ => H_0 се прифаќа
Втор начин: $p - \text{вредност} = 1 - F(z) = 1 - F(1{,}266) = 1 - 0{,}898 = 0{,}102 > 0{,}05$ => H_0 се прифаќа

в. Бидејќи $H_1: M < 29$ =>левостран еднонасочен тест (областа на отфрлање на нултата хипотеза од левата страна на распоредот).
Критична вредност: $F(z_\alpha) = \alpha = 0{,}05 \Rightarrow z_\alpha = -1{,}645$
Реализирана вредност: $z = \frac{\bar{x}-M}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{25-29}{1{,}58} = -2{,}53;\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{150}}{\sqrt{60}} = 1{,}58$
Бидејќи $z = -2{,}53 < -1{,}645 = z_\alpha$ => H_0 се отфрла
Втор начин: $p - \text{вредност} = F(z) = F(-2{,}53) = 0{,}0057 < 0{,}05$ => H_0 се отфрла

7.2 а. $H_0: M \leq 56{,}2$ $H_1: M > 56{,}2$
б. Да се отфрли $H_0: M \leq 56{,}2$ кога е вистинита
в. Да се прифати $H_0: M \leq 56{,}2$ кога е невистинита

7.4 $H_0: M = 4{,}1$ $H_1: M \neq 4{,}1$
Се отфрла нултата хипотеза

7.5 Да. $|z| = |-9{,}49| > 2{,}33 = z_{\frac{\alpha}{2}}$

7.6 Да. $z = 1{,}67 > 1{,}645 = z_{1-\alpha}$

7.7 Менаџерот ќе ја прифати новата процедура ако постои силен доказ дека просечното ниво на производство е повисоко со новиот процес. Затоа ќе ја дефинираме алтернативната хипотеза како

$H_1: M > 80$

и нултата хипотеза како

$H_0: M \leq 80$

Ако го дефинираме нивото на значајност како $\alpha = 0{,}05$, тогаш ако ја отфрлиме нултата хипотеза и заклучиме дека новиот процес има повисока продуктивност, веројатноста дека сме направиле грешка ќе биде 0,05 или помала. Ова ќе биде силен доказ во полза на нашата препорака.

Ќе направиме случаен примерок од $n = 36$ часови на производство со користење на новиот процес и ќе ја пресметаме средината на примерокот $\bar{x}$. Со ниво на значајност од $\alpha = 0{,}05$, правилото на одлучување ќе биде

Ја отфрламе H_0 ако $Z = \dfrac{\bar{x} - 80}{\dfrac{8}{\sqrt{36}}} > 1{,}645$

Каде $z_{0,05} = 1{,}645$ е определена од стандардизираната нормална таблица.

Средината на примерокот е еднаква на $\bar{x} = 83$. Врз основа на овој резултат

$$Z = \frac{83 - 80}{\frac{8}{\sqrt{36}}} = 2{,}251 > 1{,}645$$

и ние ќе ја отфрлиме нултата хипотеза и ќе заклучиме дека постои силен доказ кој го подржува воведувањето на новиот производен процес.

7.10 б. $p -$ вредност $= 2 \cdot 0{,}0228 = 0{,}0456 < 0{,}05 => H_0$ се отфрла

7.11 $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum x^2 f - n\bar{x}^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{6.312{,}5 - 50 \cdot 10{,}4^2}{50 \cdot 49}} = 0{,}608$

а. Нултата хипотеза се отфрла.
б. Нултата хипотеза се прифаќа.
в. Нултата хипотеза се прифаќа.

7.12 а. Се прифаќа нултата хипотеза.
б. Се отфрла нултата хипотеза.

7.13 **Тестирање на хипотезата за разликата на аритметичките средини на две популации**

Батерии од производителот А: $n_1 = 200;\ \bar{x}_1 = 9{,}8;\ \sigma_1 = 1{,}2$
Батерии од производителот Б: $n_1 = 150;\ \bar{x}_1 = 10{,}1;\ \sigma_1 = 1{,}4$

$H_0: M_1 = M_2 \qquad H_1: M_1 \neq M_2$

Бидејќи $M_1 \neq M_2$ => двонасочен тест (областа на отфрлање на нултата хипотеза од двете страни на распоредот).

Критична вредност: $F\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975 => z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

Реализирана вредност: $z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{9{,}8 - 10{,}1}{0{,}1238} = -2{,}42;\ \ \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{1{,}2}{200} + \frac{1{,}4}{150}} = 0{,}1238$

Бидејќи $|z| = 2{,}42 > 1{,}96 = z_{\frac{\alpha}{2}} => H_0$ се отфрла

7.14 $|z| = 0{,}739 < 2{,}575 = z_{\frac{\alpha}{2}}$ => H_0 се прифаќа

7.15 $n_1 = 6;\ n_2 = 6$ => Студентов $- t$ распоред
$H_0: M_1 = M_2 \quad H_1: M_1 \neq M_2$
Критична вредност: $t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2} = t_{\frac{0{,}05}{2};6+6-2} = t_{0{,}025;10} = 2{,}2281$
Реализирана вредност: $t = \frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{s_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} = \frac{39{,}2-39{,}7}{0{,}302} = -1{,}66;$

$$s_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sum x_{i1}^2 - n_1\bar{x}_1^2}{n_1(n_1-1)} + \frac{\sum x_{i1}^2 - n_1\bar{x}_1^2}{n_1(n_1-1)}} = \sqrt{\frac{9.221{,}18 - 6\cdot 39{,}2^2}{6(6-1)} + \frac{9.457{,}92 - 6\cdot 39{,}7^2}{6(6-1)}} = 0{,}302$$

Бидејќи $|t| = 1{,}66 < 2{,}2281 = t_{0{,}025;10}$ => H_0 се прифаќа

7.16 **Тестирање на хипотезата за пропорцијата на популацијата**
Успех: ”Посетителот е помлад од 36 години”; P_0 е пропорција на успехот во популацијата; p е пропорција на успехот во примерокот.
$H_0: P_0 = 0{,}3 \quad H_1: P_0 \neq 0{,}3$
Бидејќи $H_1: P_0 \neq 0{,}3$ => двонасочен тест (областа на отфрлање на нултата хипотеза од двете страни на распоредот).
Критична вредност: $F\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975 => z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$
Реализирана вредност: $z = \frac{p-P_0}{\sigma_p} = \frac{0{,}32-0{,}30}{0{,}046} = 0{,}435;\ \sigma_p = \sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}3(1-0{,}3)}{100}} = 0{,}046$
Бидејќи $|z| = 0{,}435 < 1{,}96 = z_{\frac{\alpha}{2}}$ => H_0 се прифаќа

7.17 Успех: ”Конзервата содржи масноти повеќе од определениот износ”; P_0 е пропорција на успехот во популацијата; p е пропорција на успехот во примерокот. f е фреквенција на успехот во примерокот.
$H_0: P_0 \geq 0{,}1 \quad H_1: P_0 < 0{,}1$
Бидејќи $H_1: P_0 < 0{,}1$ =>левостран еднонасочен тест (областа на отфрлање на нултата хипотеза од левата страна на распоредот).
Критична вредност: $F(z_\alpha) = \alpha = 0{,}01 => z_\alpha = -2{,}33;$
Реализирана вредност: $z = \frac{p-P_0}{\sigma_p} = \frac{0{,}12-0{,}10}{0{,}021} = 0{,}952;\ p = \frac{f}{n} = \frac{24}{200} = 0{,}12;\ \sigma_p = \sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{200}} = 0{,}021$
Бидејќи $z = 0{,}952 > -2{,}33 = z_\alpha$ => H_0 се прифаќа

7.18 Бидејќи $z = -0{,}417 > -1{,}645 = z_\alpha$ => H_0 се прифаќа

7.19 Успех: ”Гледачот е жена”.
$H_0: P_0 \leq 0{,}2 \quad H_1: P_0 > 0{,}2$
Бидејќи $H_1: P_0 > 0{,}2$ =>десностран еднонасочен тест (областа на отфрлање на нултата хипотеза од десната страна на распоредот).
Критична вредност: $F(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 => z_{1-\alpha} = 1{,}645;$
Реализирана вредност: $z = \frac{p-P_0}{\sigma_p} = \frac{0{,}25-0{,}2}{0{,}02} = 2{,}50;\ p = \frac{f}{n} = \frac{100}{400} = 0{,}25;\ \sigma_p = \sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}2(1-0{,}2)}{400}} = 0{,}02$
Бидејќи $z = 2{,}50 > 1{,}645 = z_{1-\alpha}$ => H_0 се отфрла

7.20 **Тестирање на хипотезата за разликата на пропорциите на две популации**
Успех: ”Огласот е хумористичен”
Британски списанија: $n_1 = 203;\ f_1 = 52;\ p_1 = \frac{f_1}{n_1} = \frac{52}{203} = 0{,}256$

Американски списанија: $n_2 = 270;\ f_2 = 56;\ p_2 = \frac{f_2}{n_2} = \frac{56}{270} = 0{,}207$

$H_0: P_1 = P_2 \qquad H_1: P_1 \neq P_2$

Бидејќи $P_1 \neq P_2$ => двонасочен тест (областа на отфрлање на нултата хипотеза од двете страни на распоредот).

Критична вредност: $F\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

Реализирана вредност:

$z = \frac{p_1 - p_2}{\sigma_{p_1-p_2}} = \frac{0{,}256-0{,}207}{0{,}039} = 1{,}25;\ \ \sigma_{p_1-p_2} = \sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left[\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right]} = \sqrt{0{,}228(1-0{,}228)\left[\frac{1}{203}+\frac{1}{270}\right]} = 0{,}039\ ;\ \bar{p} = \frac{f_1+f_2}{n_1+n_2} = \frac{52+56}{203+270} = 0{,}228$

Бидејќи $|z| = 1{,}25 < 1{,}96 = z_{\frac{\alpha}{2}}$ => H_0 се прифаќа.

7.21 Бидејќи $|z| = 1{,}14 < 2{,}575 = z_{\frac{\alpha}{2}}$ => H_0 се прифаќа.

7.22 Бидејќи $|z| = 1{,}42 < 1{,}96 = z_{\frac{\alpha}{2}}$ => H_0 се прифаќа.

ГЛАВА 8

8.1 **Анализа на варијанса со еден фактор**

а. $H_0: M_1 = M_2 = M_3$ (Нивоата на факторот имаат исти ефекти - различните ѓубрива остваруваат различни просечни приноси. Контролираниот фактор не влијае на варијабилитетот на набљудуваната појава - Видот на ѓубривото не влијае врз варијабилитетот на приносите).

H_1: Аритметичките средини барем на две популации се разликуваат (Барем две нивоа на факторот имаат различни ефекти - барем два вида на ѓубрива остваруваат различни просечни приноси. Контролираниот фактор влијае на варијабилитетот на набљудуваната појава - Видот на ѓубривото влијае врз варијабилитетот на приносите).

Парцела	A_1	A_2	A_3	
1	85	90	95	
2	70	70	75	
3	65	60	80	
S_i	**220**	**220**	**250**	$\sum S_i = 690$
S_i^2	**48.400**	**48.400**	**62.500**	$\sum S_i^2 = 159.300$
$\bar{x}_i$	**73,33**	**73,33**	**83,33**	

x_{ij}^2			
7.225	8.100	9.025	
4.900	4.900	5.625	
4.225	3.600	6.400	
16.350	**16.600**	**21.050**	***54.000***

$S_A = \frac{\sum_{i=1}^{r} S_i^2}{n} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} S_i\right)^2}{rn} = \frac{159.300}{3} - \frac{690^2}{3 \cdot 3} = 200$

$S_T = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} S_i\right)^2}{rn} = 54.000 - \frac{690^2}{3 \cdot 3} = 1.100$

$S_R = S_T - S_A = 1.100 - 200 = 900$
$V_A = \frac{S_A}{r-1} = \frac{200}{3-1} = 100;\ V_R = \frac{S_R}{r(n-1)} = \frac{900}{3\cdot(3-1)} = 150$
Критична вредност: $F_{\alpha;\,v_1;v_2} = F_{0,05;\,r-1;r(n-1)} = F_{0,05;\,2;\,6} = 5,14$
Реализирана вредност: $F = \frac{V_A}{V_R} = \frac{100}{150} = 0,67$
Бидејќи $F = 0,67 < 5,14 = F_{\alpha;\,v_1;v_2}$ => H_0 се прифаќа. Видот на ѓубривото не влијае на варијабилитетот на приносите.

б. Бидејќи се прифаќа нултата хипотеза нема потреба од спроведување на Tukey-евиот тест. Тој ќе покаже дека не постојат статистички значајни разлики помеѓу трите апсолутни разлики на аритметичките средини на нивоата на факторот.

$T = Q_{\alpha;r;r(n-1)}\sqrt{\frac{V_R}{n}} = Q_{0,05;3;3(3-1)}\sqrt{\frac{V_R}{n}} = Q_{0,05;3;6}\sqrt{\frac{V_R}{n}} = 4,34\sqrt{\frac{150}{3}} = 30,69$

Број на можни споредби: $\frac{r(r-1)}{2} = \frac{3(3-1)}{2} = 3$
$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |73,3 - 73,3| = 0 < T$
$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| = |73,3 - 83,3| = 10 < T$
$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| = |73,3 - 83,3| = 10 < T$
Ниту една апсолутна разлика не е поголема од Т => Не постојат статистички значајни разлики помеѓу нивоата на факторот.

8.2 Бидејќи $F = 13,42 > 3,89 = F_{\alpha;\,v_1;v_2}$ => H_0 се отфрла.
Статистички значајни разлики постојат помеѓу прва и втора, и прва и треат смена. Би ја препорачале прва смена (има највисока аритметичка средина).

8.3 а. Бидејќи $F = 49,17 > 3,89 = F_{\alpha;\,v_1;v_2}$ => H_0 се отфрла.
б. “Јосип Краш“

8.4 Анализа на варијанса со два фактора

Фактор А: $H_0: M_1 = M_2 = M_3$; H_1: Аритметичките средини барем на две популации се разликуваат

Фактор В: $H_0: M_1 = M_2 = M_3 = M_4$; H_1: Аритметичките средини барем на две популации се разликуваат

	A_1	A_2	A_3	S_j	S_j^2	$\bar{x}_j$
B_1	4	3	2	**9**	**81**	**3**
B_2	2	2	2	**6**	**36**	**2**
B_3	5	4	3	**12**	**144**	**4**
B_4	3	1	1	**5**	**25**	**1,67**
S_i	**14**	**10**	**8**	$\sum S_i = \sum S_j = 32$	$\sum S_j^2 = 286$	
S_i^2	**196**	**100**	**64**	$\sum S_i^2 = 360$		
$\bar{x}_i$	**3,5**	**2,5**	**2**			

x_{ij}^2			
16	9	4	
4	4	4	
25	16	9	
9	1	1	
54	**30**	**18**	***102***

$S_A = \frac{\sum_{i=1}^{r} S_i^2}{s} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} S_i\right)^2}{rs} = \frac{360}{4} - \frac{32^2}{3\cdot4} = 4,67$

$S_B = \frac{\sum_{i=1}^{r} S_j^2}{r} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} S_j\right)^2}{rs} = \frac{286}{3} - \frac{32^2}{3\cdot 4} = 10$
$S_T = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} S_i\right)^2}{rs} = 102 - \frac{32^2}{3\cdot 4} = 16{,}67$
$S_R = S_T - (S_A + S_A) = 16{,}67 - (4{,}67 + 10) = 2$
$V_A = \frac{S_A}{r-1} = \frac{4{,}67}{3-1} = 2{,}34;\ V_B = \frac{S_B}{s-1} = \frac{10}{4-1} = 3{,}33;\ V_R = \frac{S_R}{(r-1)(s-1)} == \frac{2}{(3-1)(4-1)} = 0{,}33$
* Фактор А
Критична вредност: $F_{\alpha;\, v_1; v_2} = F_{0{,}05;\, r-1;(r-1)(s-1)} = F_{0{,}05;\, 2;\, 6} = 5{,}14$
Реализирана вредност: $F_A = \frac{V_A}{V_R} = \frac{2{,}34}{0{,}33} = 7{,}09$
Бидејќи $F_A = 7{,}09 > 5{,}14 = F_{\alpha;\, v_1; v_2}$ => H_0 се отфрла. Факторот А влијае на појавата.
$T_A = Q_{\alpha;r;(r-1)(s-1)}\sqrt{\frac{V_R}{s}} = Q_{0{,}05;3;(3-1)(4-1)}\sqrt{\frac{V_R}{s}} = Q_{0{,}05;3;6}\sqrt{\frac{V_R}{s}} = 4{,}34\sqrt{\frac{0{,}33}{4}} = 1{,}25$
Број на можни споредби: $\frac{r(r-1)}{2} = \frac{3(3-1)}{2} = 3$
$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |3{,}5 - 2{,}5| = 1 < T$
$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| = |3{,}5 - 2| = 1{,}5 > T^*$
$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| = |2{,}5 - 2| = 0{,}5 < T$
Значајни разлики во приходите постојат помеѓу првата и третата локација. Најдобра е првата локација.
* Фактор В
Критична вредност: $F_{\alpha;\, v_1; v_2} = F_{0{,}05;\, s-1;(r-1)(s-1)} = F_{0{,}05;\, 3;\, 6} = 4{,}76$
Реализирана вредност: $F_B = \frac{V_B}{V_R} = \frac{3{,}33}{0{,}33} = 10{,}09$
Бидејќи $F_B = 10{,}09 > 4{,}76 = F_{\alpha;\, v_1; v_2}$ => H_0 се отфрла. Факторот В влијае на појавата.
$T_B = Q_{\alpha;s;(r-1)(s-1)}\sqrt{\frac{V_R}{r}} = Q_{0{,}05;4;(3-1)(4-1)}\sqrt{\frac{V_R}{r}} = Q_{0{,}05;4;6}\sqrt{\frac{V_R}{r}} = 4{,}90\sqrt{\frac{0{,}33}{3}} = 1{,}63$
Број на можни споредби: $\frac{s(s-1)}{2} = \frac{4(4-1)}{2} = 6$
$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |3 - 2| = 1 < T$
$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| = |3 - 4| = 1 < T$
$|\bar{x}_1 - \bar{x}_4| = |3 - 1{,}67| = 1{,}33 < T$
$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| = |2 - 4| = 2 > T^*$
$|\bar{x}_2 - \bar{x}_4| = |2 - 1{,}67| = 0{,}33 < T$
$|\bar{x}_3 - \bar{x}_4| = |4 - 1{,}67| = 2{,}33 > T^*$
Значајни разлики во приходите постојат помеѓу првиот и четвртиот, и помеѓу третиот и четвртиот вид на продавница. Најдобар е третиот вид на продавница.

8.5 а.
* Фактор А
Критична вредност: $F_{0{,}05;\, 3;\, 6} = 4{,}76$
Реализирана вредност: $F_A = \frac{8{,}56}{0{,}47} = 18{,}21$
Бидејќи $F_A = 18{,}21 > 4{,}76 = F_{\alpha;\, v_1; v_2}$ => H_0 се отфрла. Типот на семето влијае на варијабилитетот на приносите.
* Фактор В
Критична вредност: $F_{0{,}05;\, 2;\, 6} = 5{,}14$
Реализирана вредност: $F_B = \frac{53{,}59}{0{,}47} = 114{,}02$
Бидејќи $F_B = 114{,}02 > 5{,}14 = F_{\alpha;\, v_1; v_2}$ => H_0 се отфрла. Типот на ѓубривото влијае на варијабилитетот на приносите.

б.
* Фактор А
$Q_{\alpha;r;(r-1)(s-1)} = 4{,}90;\ T_A = 1{,}91$; Го препорачуваме семето од типот A_4;
* Фактор В
$Q_{\alpha;s;(r-1)(s-1)} = 4{,}34;\ T_B = 1{,}49$; Го препорачуваме ѓубривото од типот B_1;

8.6 Бидејќи $F_A = 0{,}412 < 3{,}29 = F_{\alpha;\, v_1;v_2}$ => H_0 се прифаќа. Се прифаќа хипотезата за еднаквоста на просечните приноси на пченица за различни годишни времиња.
Бидејќи $F_B = 10{,}52 > 2{,}90 = F_{\alpha;\, v_1;v_2}$ => H_0 се отфрла. Се отфрла хипотезата за еднаквоста на просечните приноси на одделните сорти на пченица.

8.7 Бидејќи $F_A = 10{,}92 > 5{,}14 = F_{0,05;2;6}$ => H_0 се отфрла. Дизајнот влијае на продажбата на производот.
Како најдобар дизајн за продажба се препорачува дизајнот В.
Бидејќи $F_B = 19{,}69 > 4{,}76 = F_{0,05;\, 3;6}$ => H_0 се отфрла. Регионот влијае на продажбата на производот.
Како најдобар регион за продажба се препорачува источниот регион.

ГЛАВА 9

9.1 Тест во облик на распоред - униформен распоред

H_0: Емпирискиот распоред е униформен. Иста фреквенција за сите модалитети (Испитаниците се еднакво наклонети кон сите марки на безалкохолни пијалоци. За секоја марка ист број на испитаници сметаат дека е најдобра).
H_1: Емпирискиот распоред не е униформен (Испитаниците не се еднакво наклонети кон сите марки).

Марка	f_i	f_i^t	$f_i - f_i^t$	$(f_i - f_i^t)^2$	$\frac{(f_i - f_i^t)^2}{f_i^t}$
А	190	200	-10	100	0,5
Б	230	200	30	900	4,5
В	191	200	-9	81	0,405
Г	161	200	-39	1521	7,605
Д	228	200	28	784	3,92
	1.000	**1.000**			**16,93**

f_i = емпириски фреквенции;
f_i^t = очекувани фреквенции;
r = број на модалитети.

Очекуваните фреквенции се добиваат како: $f_i^t = \frac{\sum f_i}{r} = \frac{1.000}{5} = 200$.

Критична вредност: $\chi^2_{\alpha;r-1} = \chi^2_{0,01;4-1} = 13{,}277$

Реализирана вредност: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(f_i - f_i^t)^2}{f_i^t} = 16{,}93$

Бидејќи $\chi^2 = 16{,}93 > 13{,}277 = \chi^2_{\alpha;r-1}$ => H_0 се отфрла. Емпирискиот распоред не е униформен (Испитаниците не се еднакво наклонети кон сите марки на безалкохолни пијалоци).

9.2 Бидејќи $\chi^2 = 3{,}25 < 13{,}277 = \chi^2_{\alpha;r-1}$ => H_0 се прифаќа. Емпирискиот распоред е униформен (Пазарните сегменти во поглед на побарувачката на новиот производ се разликуваат само во границите на случајноста).

9.3 Бидејќи $\chi^2 = 19{,}99 > 11{,}345 = \chi^2_{\alpha;r-1}$ => H_0 се отфрла. Емпирискиот распоред не е униформен (Распоредот на гледачите на ФК Вардар по натпревари не е униформен. Натпреварот влијае на бројот на гледачи).

9.4 Тест на независност на модалитетите на два белега

а.

H_0: Модалитетите на двата белега (сегмент и реакција на потрошувачите) се независни (Реакцијата на потрошувачите не зависи од пазарниот сегмент);

H_1: Модалитетите на двата белега се зависни (Реакцијата на потрошувачите зависи од пазарниот сегмент).

Сегмент	Потрошувачот го купил детергентот еднаш		Потрошувачот знае за детергентот, но не го купил		Потрошувачот не знае за детергентот		
	f_i	f_i^t	f_i	f_i^t	f_i	f_i^t	**Σ**
Север - исток	54	*48,36*	56	*40,30*	23	*44,33*	**133**
Запад	112	*108,73*	79	*90,61*	108	*99,67*	**299**
Југ	74	*82,91*	65	*69,09*	89	*76,00*	**228**
Σ	**240**	***240,00***	**200**	***200,00***	**220**	***220,00***	**660**

$f_{11}^t = \frac{240\cdot133}{660} = 48{,}36$; $f_{12}^t = \frac{200\cdot133}{660} = 40{,}30$; $f_{13}^t = \frac{220\cdot133}{660} = 44{,}33$

f_i	f_i^t	$f_i - f_i^t$	$(f_i - f_i^t)^2$	$\frac{(f_i - f_i^t)^2}{f_i^t}$
54	48,36	5,64	31,77	0,66
112	108,73	3,27	10,71	0,10
74	82,91	-8,91	79,37	0,96
56	40,30	15,70	246,39	6,11
79	90,61	-11,61	134,70	1,49
65	69,09	-4,09	16,74	0,24
23	44,33	-21,33	455,11	10,27
108	99,67	8,33	69,44	0,70
89	76,00	13,00	169,00	2,22
660	**660**			**22,74**

r = број на модалитети на првиот белег; k = број на модалитети на вториот белег.

Критична вредност: $\chi^2_{\alpha;(r-1)(k-1)} = \chi^2_{0,05;(3-1)(3-1)} = \chi^2_{0,05;4} = 9{,}488$

Реализирана вредност: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\frac{(f_i-f_i^t)^2}{f_i^t} = 22{,}74$

Бидејќи $\chi^2 = 22{,}74 > 9{,}488 = \chi^2_{\alpha;(r-1)(k-1)}$ => H_0 се отфрла. Модалитетите на двата белега се зависни (Реакцијата на потрошувачите зависи од пазарниот сегмент).

б.

$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n+\chi^2}} = \sqrt{\frac{22{,}74}{660+22{,}74}} = 0{,}18$

Бидејќи $r = k = 3$ може да се пресмета C_{max}; $C_{max} = \sqrt{\frac{r-1}{r}} = 0{,}82$.

Зависноста помеѓу модалитетите на двата белега е слаба.

9.5

а. Бидејќи $\chi^2 = 1{,}01 < 9{,}488 = \chi^2_{\alpha;(r-1)(k-1)}$ => H_0 се прифаќа.

б. $C = 0{,}091$.

9.6 Мали очекувани фреквенции

Број на прекини во работата	до 10		11-20		21 и повеќе		
	f_i	f_i^t	f_i	f_i^t	f_i	f_i^t	Σ
0	7	*9,47*	20	*20,13*	18	*15,39*	**45**
1	6	*5,26*	12	*11,18*	7	*8,55*	**25**
2	3	*1,26*	2	*2,68*	1	*2,05*	**6**
Σ	**16**	***16,00***	**34**	***34,00***	**26**	***26,00***	**76**

Очекуваните фреквенции на модалитетот “2” на белегот “број на прекини во работата” се мали (<5). Поради, тоа треба да се изврши прегрупирање на податоците. Модалитетот “2” се спојува со модалитетот “1”:

Број на прекини во работата	до 10		11-20		21 и повеќе		
	f_i	f_i^t	f_i	f_i^t	f_i	f_i^t	Σ
0	7	*9,47*	20	*20,13*	18	*15,39*	**45**
1 - 2	9	*6,53*	14	*13,87*	8	*10,61*	**31**
Σ	**16**	***16,00***	**34**	***34,00***	**26**	***26,00***	**76**

f_i	f_i^t	$f_i - f_i^t$	$(f_i - f_i^t)^2$	$\frac{(f_i - f_i^t)^2}{f_i^t}$
7	*9,47*	-2,47	6,10	0,64
20	*20,13*	-0,13	0,02	0,00
18	*15,39*	2,61	6,81	0,44
9	*6,53*	2,47	6,10	0,93
14	*13,87*	0,13	0,02	0,00
8	*10,61*	-2,61	6,81	0,64
76	**76**			**2,67**

а. Бидејќи $\chi^2 = 2{,}67 < 5{,}991 = \chi^2_{0{,}05;(2-1)(3-1)}$ => H_0 се прифаќа. Бројот на прекини во работата не зависи од должината на работниот стаж.

б. $C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n+\chi^2}} = \sqrt{\frac{2{,}67}{76+2{,}67}} = 0{,}184$

9.7 Бидејќи $\chi^2 = 27{,}26 > 13{,}277 = \chi^2_{\alpha;(r-1)(k-1)}$ => H_0 се отфрла. Склоноста на потрошувачите спрема производот ”А” зависи од месечниот приход.